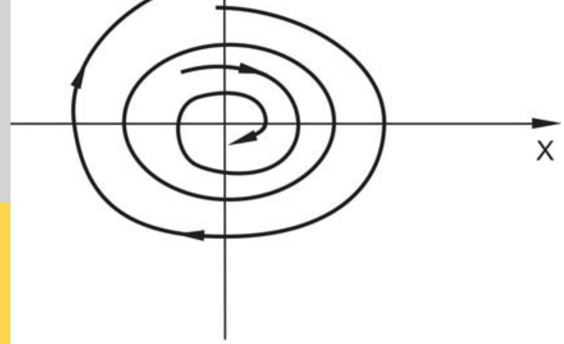
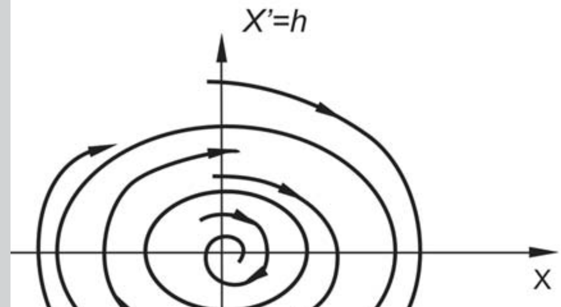


АЛЕКСАНДР МИКЕРОВ,
д. т. н., проф. каф.
систем автоматического управления
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»



Статья посвящена зарождению теории устойчивости, созданной в процессе решения частных задач небесной механики. Эти задачи состояли в описании взаимного движения планет, образования их видимой формы и были решены в работах гениальных математиков Пуанкаре и Ляпунова.

ИСТОКИ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как ни странно, истоки теории устойчивости автоматических систем лежат далеко от создания первых регуляторов — в небесной механике. В соответствии с законами, открытыми немецким ученым Иоганном Кеплером (Johannes Kepler) и подтвержденными теорией тяготения Исаака Ньютона, орбиты планет вокруг Солнца имели строго эллиптическую форму. Однако вскоре было обнаружено, что орбита седьмой планеты Солнечной системы — Урана имеет заметные девиации от эллипса. Это дало возможность астрономам Урбану Леверье (Urbain Le Verrier) и Джону Адамсу (John Adams) предположить наличие возмущающего воздействия от некоей неизвестной планеты, которая и была найдена в точном соответствии с результатами их вычислений немецким астрономом Иоганном Галле (Johann Galle) в 1846 г. [1]. Новая планета, названная Нептуном, была открыта, по образному выражению, «на кончике пера».

Но тогда возникла чисто математическая задача аналитического описания движения нескольких тел в пространстве и, в частности, устойчивости такого движения, например применительно к солнечной системе. Эта проблема, решение которой оказалась неожиданно трудным даже для самого простого случая движения трех тел (например, Солнца, Земли и Луны), была названа «задачей трех тел». Работа над этим вопросом (а также над проблемой формы небесных тел) и дала возможность французскому ученому Анри Пуанкаре (Henri Poincare) и русскому математику Александру Михайловичу Ляпунову заложить основы общей теории устойчивости движения любых динамических систем. Позже эта теория оказалась востребованной прежде всего специалистами по системам автоматического регулирования, первые работы которых рассмотрены в статье [2].

ЖЮЛЬ АНРИ ПУАНКАРЕ

Знаменитый французский математик, астроном и философ, академик Анри Пуанкаре (рис. 1) родился в Нанси в семье профессора медицины. Окончил престижные высшие Политехническую и Горную школы и сначала работал инспектором на шахтах, а затем преподавателем в Канском и Парижском университетах. Был одним из последних великих математиков-энциклопедистов, отличался исключительным трудолюбием и плодовитостью. По выражению Гюго, в его жизни «было больше трудов, чем дней» [3].

Вследствие перенесенной в детстве тяжелой болезни Пуанкаре долго не мог писать и читать, отчего у него развилась привычка к вычислениям в уме. Отсюда его особый интуитивный метод: сначала находить решение даже самых сложных математических проблем в голове и только потом записывать логический путь решения.

В 1882 г. Пуанкаре на примере уравнений первого и второго порядков создает новый раздел математики — качественный анализ дифференциальных уравнений, позволяющий, в частности, судить о поведении системы без аналитического решения его дифференциального уравнения, которое не всегда возможно. Один из самых известных методов этого раздела — метод фазовой плоскости (фазового портрета), показывающий, например, зависимость скорости движения объекта от координаты его положения. Все переменные системы (положение, скорость, ускорение и т. д.) Пуанкаре называл переменными состояния, или координатами изображающей точки; состояние системы — фазовым пространством, а траекторию перемещения изображающей точки в фазовом пространстве — фазовым портретом. Следовательно, для суждения об устойчивости системы необязательно находить корни ее характеристического полинома по Максвеллу [2], а достаточно наблюдать вид фазовой траектории (портрета).

Рассмотрим фазовый портрет простейшей механической системы второго порядка в виде груза, подвешенного на пружине с сухим или вязким трением при отсутствии внешних возмущений (рис. 2). Система имеет две переменные состояния: положение груза x и его скорость y. Как видно на рис. 2, после выведения системы из исходного состояния равновесия: $x = 0$; $y = 0$ в некоторую изображающую точку А фазовая траектория сходится к исходному состоянию равновесия, что свидетельствует об устойчивости данной системы.

В общем случае система может описываться системой дифференциальных уравнений высокого порядка N. Тогда поведение системы в любой момент времени задается изображающей точкой в соответствующем N-мерном пространстве состояний.

Вооруженный новым методом, Пуанкаре берется за задачу трех тел и неожиданно приходит к выводу, что известные математические функции не могут стать ее решением. Он указал не только на частные случаи, когда движение может быть периодическим и устойчивым, но и на возможность хаотического движения (начало теории хаоса) [4].

А общее решение проблемы устойчивости любой системы высокого порядка было предложено Ляпуновым.

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЛЯПУНОВ

Великий русский математик и механик Александр Михайлович Ляпунов (рис. 3) родился в Ярославле в семье астронома Казанского университета.

Окончил Петербургский университет и защитил магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости», тему которой ему предложил знаменитый математик Пафнутий Львович Чебышев. Эта актуальная для астрономии задача, объясняющая видимую форму планет и других небесных тел, образовавшихся вследствие застывания первоначально жидких вращающихся масс, становится для Ляпунова главной, и он неоднократно к ней возвращался [5, 6].

Исследования вопросов устойчивости, в том числе и применительно к задаче трех тел, Александр Михайлович продолжил в Харьковском университете, и их итогом стала докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения», защищенная в Московском университете в 1892 г. Также он был известен своими работами по теории потенциала, по гидродинамике и теории вероятности. В 1901 г. избран действительным членом Российской академии наук, продолжил свою деятельность уже в Санкт-Петербурге, впоследствии стал членом ряда зарубежных академий (в том числе Парижской). В связи с началом революции и болезнью жены переезжает в Одессу. Потрясенный ее смертью, болезнью глаз и тяготами гражданской войны, Александр Михайлович застрелился 31 октября 1918 г. в оккупированной немцами Одессе.

В своих работах Ляпунов взялся за решение труднейшей задачи: определение устойчивости в общем случае нелинейной, нестационарной, взаимосвязанной системы любого порядка. Первоначально вспомогательный, вопрос о критериях устойчивости формы вращающегося жидкого тела постепенно перерос в гениальную общую теорию устойчивости движения, не превзойденную до сих пор.

При этом Ляпунов использовал работы по качественному анализу дифференциальных уравнений Пуанкаре, с которым состоял в постоянной переписке. Однако, в отличие от последнего, русский математик признавал только строгие аналитические методы доказательства, а в решениях с помощью рядов давал полную оценку сходимости, никогда не ограничиваясь первым приближением. Это делало его работы весьма трудными для понимания, что неоднократно отмечалось его современниками, последователями и студентами [5, 6]. Например, в работе [7] приводится мнение одного известного французского математика, который ответил на присланную докторскую диссертацию Ляпунова словами: «Наверное, это прекрасная работа; к сожалению, моей жизни не хватит для того, чтобы понять ее».

РИС. 1. ◀ Анри Пуанкаре (1854–1912)

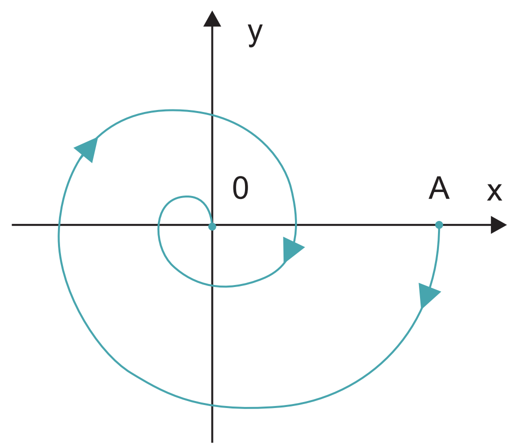


РИС. 2. ▲ Фазовый портрет устойчивой системы

Основные заслуги Ляпунова в решении проблемы устойчивости состоят в следующем.

Прежде всего, он дал точное математическое определение понятию устойчивости. Не прибегая к математическим обозначениям,

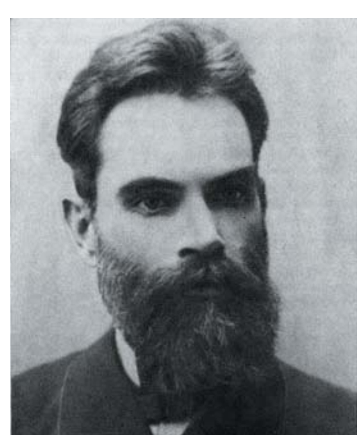


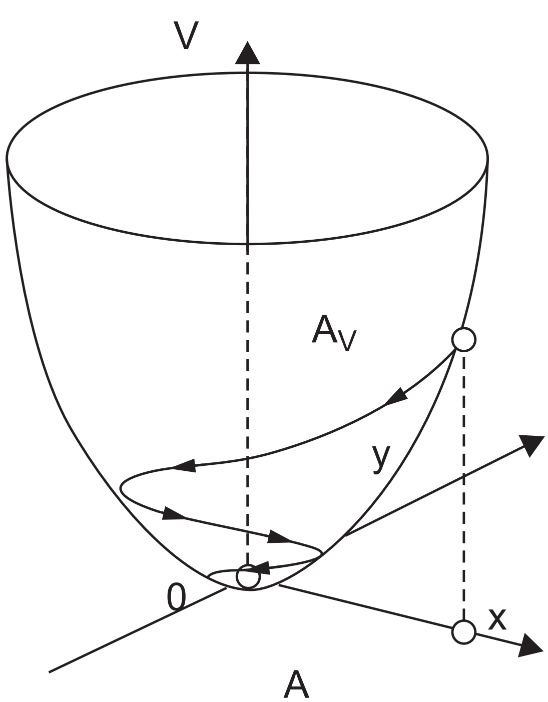
РИС. 3. ◀ Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918)

Прямой метод Ляпунова определяет условия устойчивости системы самого общего вида. Система в двухмерном пространстве состояния асимптотически устойчива по Ляпунову, если существует некоторая положительная определенная функция V (x, y, t), полная производная по времени которой, найденная в соответствии с уравнениями состояния системы, отрицательна для всех t≥t0. Такая функция V называется сейчас функцией Ляпунова. Для более сложной системы, имеющей N переменных состояния x1, x2,… xN, функция Ляпунова V (x1, x2,… xN, t) может иметь совсем другой физический смысл, но формулировка условия устойчивости будет аналогична вышеприведенной.

ограничимся понятием асимптотической устойчивости, имеющим наибольшее практическое значение. Предположим, что система находится в некотором положении равновесия. Тогда она асимптотически устойчива, если после ее принудительного выведения из этого исходного положения она самостоятельно в него возвращается — например, так, как показано на рис. 2.

Наиболее важным является так называемый «прямой метод Ляпунова», который определяет условия устойчивости системы самого общего вида. К примеру, рассмотренная выше система в двухмерном пространстве состояния асимптотически устойчива по Ляпунову, если существует некоторая положительно определенная функция *V (x, y, t)*, полная производная по времени которой, найденная в соответствии с уравнениями состояния системы, отрицательна для всех $t \geq t_0$. Такая функция *V* называется сейчас функцией Ляпунова.

РИС. 4. ▼
Пример функции Ляпунова



Смысл этого условия для нашего примера виден на рис. 4, где функция Ляпунова показана в виде параболоида *V* [8].

Если в начале движения при $t = t_0$ изображающей точке A соответствует точка A_V на поверхности этого параболоида, то с течением времени значение функции *V* стремится к началу координат, поскольку в любой точке все ее производные по времени убывают, и фазовый портрет системы имеет вид, как на рис. 2. Для этого примера механической системы второго порядка физический смысл функции Ляпунова очень простой — это полная энергия системы в виде суммы ее кинетической и потенциальной энергий. Очевидно, что если в процессе движения она постоянно убывает (производная отрицательная) в данном случае за счет трения, то тело в конце концов придет в состояние равновесия.

Для более сложной системы, имеющей *N* переменных состояния $x_1, x_2, \ldots x_N$, функция Ляпунова $V (x_1, x_2, \ldots x_N, t)$ может иметь совсем другой физический смысл, но формулировка условия устойчивости будет аналогична вышеприведенной.

Ляпунов разрешил труднейшую проблему устойчивости в самом общем виде. О справедливости его методов свидетельствовал многолетний спор с Пуанкаре и другим известным математиком и астрономом, сыном знаменитого Чарльза Дарвина и президентом английского астрономического общества — Джорджем Дарвином (George Darwin) [5, 6]. Последний выдвинул космогоническую гипотезу о процессе образования Луны, который, по его мнению, протекал следующим образом. Одна из жидких планет Солнечной системы, называемая Протоземля, имеющая эллипсоидальную форму, вследствие быстрого вращения приняла за счет центробежных сил сначала сигарообразную, а затем и грушевидную форму, названную так по предложению Пуанкаре. Со временем за счет все тех же центробежных сил маленькая головка этой «груши» отделилась, образовав спутник материнской планеты — Луну. Процесс этот протекал миллионы лет, и ученые понимали, что для его реализации необходимо, чтобы все промежуточные формы этой Протоземли были устойчивыми. Вопрос, таким образом, упирался в проблему устойчивости форм вращающейся жидкости.

Пуанкаре в свойственной ему интуитивной манере решил эту задачу, ограничившись первым приближением, которое указывало на устойчивость грушевидной формы. Но он понимал недостаточность такого подхода, поэтому, когда Дарвин обратился к нему с этим вопросом, Пуанкаре посоветовал ему просчитать второе приближение, снабдив формулами и методикой расчета. Взявшись за этот труднейший расчет, Дарвин в конце концов довел его до успешного решения и с удовлетворением обнаружил, что и во втором приближении грушевидная форма может быть устойчивой. Это было воспринято научным сообществом как несомненное доказательство гипотезы Дарвина.

Однако с этим не согласился Ляпунов. В своей магистерской диссертации он писал о возможности грушевидной формы вращающейся жидкости, но не мог проверить ее устойчивость. Спустя двадцать лет он вернулся к этому вопросу, вооруженный своей общей теорией устойчивости, и нашел точное

Потребность в создании теории устойчивости впервые возникла в небесной механике для решения двух важных задач: устойчивости взаимного движения планет и происхождения их видимой формы.

- Первая задача начиналась с определения устойчивости движения трех тел, а вторая упиралась в устойчивость особой грушевидной формы вращающейся жидкой массы планеты до ее затвердевания. Основополагающий вклад в этом направлении внесли работы французского ученого Пуанкаре и российского математика Ляпунова.
- Пуанкаре, опираясь на созданный им качественный анализ дифференциальных уравнений, установил, что движение трех тел может быть хаотическим и лишь в частных случаях устойчивым периодическим.
- Задача о форме вращающейся жидкости стала особенно острой после создания английским астрономом Дарвином гипотезы образования Луны вследствие отделения части планеты Протоземля, имевшей грушевидную форму, устойчивость которой подтвердил в первом приближении Пуанкаре, а во втором — сам Дарвин.
- Однако с этим не согласился Ляпунов, который, создав общую теорию устойчивости систем, нашел общее решение задачи, несомненно показывающее неустойчивость грушевидной формы и, следовательно, несостоятельность гипотезы Дарвина.

В настоящее время метод Ляпунова — это универсальное средство проверки и обеспечения устойчивости любой системы, он является ядром теории управления, в особенности современных методов оптимального, робастного и адаптивного управления.

решение задачи, показывающее неустойчивость грушевидной формы. Он указал и на источник неверных заключений Пуанкаре и Дарвина, заключавшийся в использовании только первых двух членов разложения ряда.

Тем не менее западное научное сообщество поддерживало гипотезу Дарвина. В 1912 г. скончались два участника спора — Пуанкаре и Дарвин, и вопрос оставался подвешенным до 1917 г., когда известный английский математик и астроном Джеймс Джинс (James Jeans) опубликовал свои расчеты по третьему приближению злополучной задачи. На этот раз грушевидная форма оказалась неустойчивой, что несомненно доказало правоту Ляпунова.

Впоследствии гипотеза Дарвина была опровергнута и геохимическими исследованиями лунных пород, и после экспедиции американцев на Луну преобладающей стала теория удара, согласно которой Протоземля столкнулась с другой, меньшей планетой Солнечной системы, вызвав выброс вещества земной мантии, принявшего затем шарообразную форму нашей спутницы [9].

Однако современники не смогли оценить глубину и перспективность идей Ляпунова, и долгое время его работы не замечались западным научным сообществом, хотя Александр Михайлович публиковал большинство своих работ на французском языке и состоял в постоянной переписке с ведущими европейскими математиками. Его знаменитая диссертация была полностью переведена на французский язык в 1907 г., а на английский — только через сто лет после ее защиты, в 1992 г. [8].

Идеи Пуанкаре и Ляпунова развивались преимущественно в Советском Союзе, рядом известных школ автоматического управления: горьковской (А. А. Андронов), казанской (Н. Г. Четаев, И. Г. Малкин), киевской (Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов), московской (Б. В. Булгаков), ленинградской (А. И. Лурье, В. И. Зубов, В. А. Якубович) и др.

Но только после запуска в 1957 г. в Советском Союзе первого спутника Земли, когда выяснилось, что синтез алгоритмов управления ракетно-космическими системами может эффективно выполняться с использованием метода функций Ляпунова, западные ученые стали внимательно изучать и развивать его труды. Во второй половине XX века методом Ляпунова была доказана справедливость классических критериев устойчивости Рауса-Гурвица и Найквиста [8]. Сегодня термины «метод функций Ляпунова», «определения устойчивости Ляпунова», «устойчивость по Ляпунову» являются общепризнанными и используются в научных публикациях, независимо от языка их написания. ⬣

ЛИТЕРАТУРА

1. Борислав Славолюбов. История открытия Нептуна. www.allplanets.ru/solar_sistem/neptune/history_Neptune.htm
2. Микеров А. Г. Классики линейной теории автоматического регулирования. Control Engineering – Россия. 2015. № 1 (55).
3. Тяпкин А. А. Шибанов. А. С. Пуанкаре. М.: Молодая гвардия. 1982.
4. Ball R., Holmes P. Dynamical systems, stability and chaos. http://arxiv.org/pdf/nlin/0702044.pdf
5. Шибанов А. С. Александр Михайлович Ляпунов. М.: Молодая гвардия. 1985.
6. Цыкало А. Л. Александр Михайлович Ляпунов. 1857 - 1918. М.: Наука. 1988.
7. Петров Ю. П. Очерки истории теории управления. СПб.: БХВ - Петербург. 2012.
8. Bernstein D. S. From Infancy to Potency: 1857 - 1918. Lyapunov's second method and the past, present and future of control theory. www-personal.umich.edu/~dsbaero/tutorials/BernsteinCDC2001PlenaryJan2006.pdf
9. Галимов Э. М. Происхождение Луны. Российская концепция против «американской». Земля и Вселенная. 2005. №6. http://ziv.telescopes.ru/rubric/astronomy/index.html?pub=9